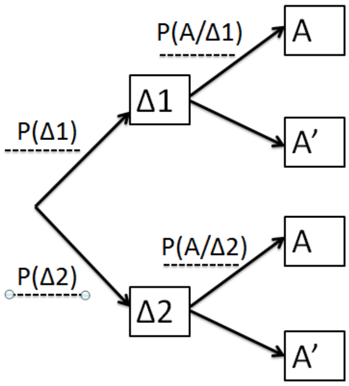
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι Φεβρουάριος 2018 Σειρά $\boxed{A}$

Θέματα 3 ως 7 και αναλυτικές (ή σύντομες) απαντήσεις

ΘΕΜΑ 3: Το δοχείο Δ1 περιέχει 6 άσπρες και 4 μαύρες μπάλες ενώ το δοχείο Δ2 περιέχει 5 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Ρίχνουμε ένα ζάρι και αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 2 επιλέγουμε τυχαία χωρίς επανάθεση 2 μπάλες από το Δ1 αλλιώς από το Δ2. **(Α1)** Ποια η πιθανότητα να πάρουμε 1 άσπρη και 1 μαύρη; **(Α2)** Ποια η πιθανότητα να είχαμε επιλέξει τις μπάλες από το δοχείο Δ2 αν πήραμε 1 άσπρη και 1 μαύρη;

Απάντηση:



Συμβολίζουμε τα γεγονότα: Δ1={επιλέγουμε από το δοχείο Δ1}, Δ2={επιλέγουμε από το δοχείο Δ2}, Α ={επιλέγουμε 1 άσπρη και 1 μαύρη} και με Ζ την τυχαία μεταβλητή με τιμές το αποτέλεσμα του ζαριού (ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη με $p_i = \frac{1}{6}, i = 1, 2, \dots, 6$). Η επιλογή του δοχείου καθορίζεται από το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού επομένως $P(\Delta 1) = P(Z > 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Αντίστοιχα $P(\Delta 2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$. Το γράφημα που περιγράφει το πείραμα δίνεται στην διπλανή εικόνα.

Α1. $P(A) = P(\Delta 1) \cdot P(A|\Delta 1) + P(\Delta 2) \cdot P(A|\Delta 2)$ (1)

Η επιλογή από κάθε δοχείο γίνεται χωρίς επανάθεση επομένως η πιθανότητα επιλογής τυχαίου δείγματος μεγέθους ν με κ άσπρες και μ μαύρες μπάλες (κ+μ=ν) υπολογίζεται με χρήση της υπεργωμετρικής κατανομής, έτσι: (1) : $P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{673}{1260} = 0.534$

Α2. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bayes $P(\Delta 2|A) = \frac{P(A\Delta 2)}{P(A)} = \frac{P(\Delta 2) \cdot P(A|\Delta 2)}{P(\Delta 1) \cdot P(A|\Delta 1) + P(\Delta 2) \cdot P(A|\Delta 2)} = \frac{225}{673} = 0.334$.

ΘΕΜΑ 4: Για μια ερώτηση επιλογής με 5 απαντήσεις εκ των οποίων μόνο η μια είναι σωστή, υποθέτουμε ότι από το σύνολο των φοιτητών που εξετάζονται μόνο το 40% γνωρίζει την απάντηση. **(Α1)** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα φοιτητή ποια η πιθανότητα να απαντήσει σωστά; **(Α2)** Η εξέταση αποτελείται από 35 ερωτήσεις αυτού του είδους ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ποια η πιθανότητα ο φοιτητής ν' απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 17 αλλά λιγότερες από 21 από τις ερωτήσεις;

Απάντηση:

Συμβολίζουμε τα γεγονότα: Γ={ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση}, Σ={ο φοιτητής απαντά σωστά}. Επιλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή, επομένως $P(\Gamma) = 0.4$. Αν ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση, $P(\Sigma|\Gamma) = 1$, αν δε γνωρίζει απαντά στην τύχη (επιλέγει τυχαία μια στις πέντε), επομένως $P(\Sigma|\Gamma') = \frac{1}{5} = 0.2$.

Α1. Επιλέγοντας τυχαία έναν φοιτητή ισχύουν αυτά που γράψαμε προηγούμενα επομένως $P(\Sigma) = P(\Gamma) \cdot P(\Sigma|\Gamma) + P(\Gamma') \cdot P(\Sigma|\Gamma') = 0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.52$

Α2. Κάθε ερώτηση αποτελεί μια δοκιμή Bernoulli για τον τυχαία επιλεγμένο φοιτητή με πιθανότητα επιτυχίας ίση με 0.52 όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα Α1. Επομένως η τ.μ. Χ που μετρά το πλήθος των σωστών απαντήσεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή Β(35, 0.52) και η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(17 \leq X < 21) = P(17 \leq X \leq 20)$. Πρακτικά για πλήθος επαναλήψεων μεγαλύτερο ή ίσο του 30 η παραπάνω πιθανότητα προσεγγίζεται σχετικά ικανοποιητικά με τη βοήθεια της κανονικής κατανομής $N(35 \cdot 0.52,\ 35 \cdot 0.52 \cdot (1 - 0.52))$ ή $N(18.2,\ 8.736)$. Χρησιμοποιώντας τη διόρθωση συνέχειας βρίσκουμε: $P(17 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{17-0.5-18.2}{2.95567} \leq Z \leq \frac{20+0.5-18.2}{2.95567}\right) = P(-0.575 \leq Z \leq 0.778) = \Phi(0.778) - \Phi(-0.577) = \Phi(0.778) + \Phi(0.577) + 1 = \cdots = 0.4991$.

ΘΕΜΑ 5: Η τ.μ. X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. **(Α1)** Να βρείτε τις συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής της τ.μ. $Y = \sqrt{X}$. **(Α2)** Να βρείτε ένα κάτω φράγμα της πιθανότητας $P(\frac{1}{3} < Y < 1)$ με χρήση της ανισότητας Chebyshev ($P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq 1/k^2$).

Απάντηση:

Α1. Η τ.μ. ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 1\ όταν\ 0 < x < 1$ και 0 αλλού. Η συνάρτηση τ.μ. $\varphi(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1], έχει αντίστροφη την $\varphi^{-1}(y) = y^2$ και θετική πυκνότητα στο διάστημα (0,1). Με εφαρμογή του Θ.4.4, η συνάρτηση π.π. της Υ δίνεται από τη σχέση $f_Y(y) = 1 \cdot \left|\frac{d(y^2)}{dy}\right| = 2y$, έτσι : η σ.π.π. είναι

$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & y\epsilon(0,1) \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Για τη σ.κ. έχουμε:

όταν $y < 0$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} 0dy = 0$,

όταν $0 \le y < 1$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_0^y 2tdt = \cdots = y^2$ και όταν $y \ge 1$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_0^1 2ydy + \int_1^{\infty} 0dy = 1$, επομένως :

η σ.κ. είναι $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^2 & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

A2. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την διασπορά της Y.

$EY = \int_0^1 y \cdot 2ydy = \cdots = \frac{2}{3}$ και $EY^2 = \int_0^1 y^2 \cdot 2ydy = \cdots = \frac{1}{2}$ άρα VarX=$\sigma^2 = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{18}$ και $\sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Το ζητούμενο κάτω φράγμα υπολογίζεται από την ανισότητα Chebyshev: $P(|X-\mu| \ge k\cdot\sigma) \le 1/k^2 \iff 1 - P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) \le 1/k^2 \iff P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) \ge 1 - 1/k^2$. Για τη δοσμένη πιθανότητα έχουμε $P\left(\frac{1}{3} < Y < 1\right) = P\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} < Y - \frac{2}{3} < 1 - \frac{2}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Y - \frac{2}{3} < \frac{1}{3}\right) = P\left(\left|Y - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}\right) = P\left(\left|Y - \frac{2}{3}\right| < \sqrt{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \ge 1 - \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 6: Η τ.μ. X μετρά πόσες φορές ένας διακόπτης λειτουργεί πριν χρειαστεί αλλαγή και έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = c(\frac{1}{3})^x$, $x = 0,1,2,\ldots.$ **(A1)** Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c ώστε η $f(x)$ να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας. **(A2)** Έστω τα γεγονότα Α: «ο διακόπτης λειτουργεί τουλάχιστον α φορές» και Β: «ο διακόπτης λειτουργεί τουλάχιστον $\alpha+\beta$ φορές». Υπολογίστε την πιθανότητα $P(B|A)$ και δώστε την ερμηνεία του αποτελέσματος. **(A3)** Βρείτε την πιθανογεννήτρια της τ.μ. X και χρησιμοποιείστε αυτή για να υπολογίσετε τις παραμέτρους EX και $VarX$.

Απάντηση:

A1. Η τ.μ. Χ είναι διακριτή (απαριθμητή), επομένως πρέπει (ι) $f(x) \ge 0$, και (ιι) $\sum_0^\infty f(x) = 1$. Από την (ιι) βασιζόμενοι στη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς έχουμε: $\sum_0^\infty c(\frac{1}{3})^x = 1 \iff \mathrm{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \iff \mathrm{c} = \frac{2}{3}$

A2. $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ (1) Είναι $\alpha, \beta \ge 0$, έτσι για τον αριθμητή το σύστημα ανισώσεων: $x \ge \alpha$ *και* $x \ge \alpha+\beta$, συνεπάγεται $x \ge \alpha+\beta$, επομένως $P(AB) = P(X \ge \alpha+\beta)$. Αντιστοίχως $P(A) = P(X \ge \alpha)$. Μπορούμε να συνεχίσουμε με τρεις τρόπους:

α τρόπος) με αλλαγή μεταβλητής στο δείκτη, $t = x - \alpha$, οπότε $x = t + \alpha$ για τον αριθμητή έχουμε νέα όρια, β και ∞, ενώ $P(X \ge \alpha+\beta) = \frac{2}{3}\sum_{x=\alpha+\beta}^{\infty} (\frac{1}{3})^x = \frac{2}{3}\sum_{t=\beta}^{\infty} (\frac{1}{3})^{t+\alpha} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^\alpha \sum_{t=\beta}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t$. Για τον παρονομαστή αντίστοιχα τα όρια είναι 0 και ∞ ενώ $P(X \ge \alpha) = \frac{2}{3}\sum_{x=\alpha}^{\infty} (\frac{1}{3})^x = \frac{2}{3}\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{t+\alpha} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^\alpha \sum_{t=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^t = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^\alpha \cdot \frac{3}{2} = (\frac{1}{3})^\alpha$. Τελικά, (1): $P(B|A) = \frac{\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^\alpha \sum_{t=\beta}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t}{(\frac{1}{3})^\alpha} = \frac{2}{3}\sum_{t=\beta}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t = P(X \ge \beta)$.

β τρόπος) $P(X \ge \alpha+\beta) = \sum_{x=\alpha+\beta}^{\infty} \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^x = \frac{2}{3}\sum_{x=\alpha+\beta}^{\infty} (\frac{1}{3})^x$, με αλλαγή μεταβλητής στο δείκτη, $t = x - \alpha - \beta$ και νέα όρια, 0 και ∞, έχουμε $P(X \ge \alpha+\beta) = \frac{2}{3}\sum_{t=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^{t+\alpha+\beta} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{\alpha+\beta} \sum_{t=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^t = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{\alpha+\beta}\frac{3}{2} = (\frac{1}{3})^{\alpha+\beta}$. Αναλόγως, με αλλαγή μεταβλητής στον δείκτη $t = x - \alpha$ και νέα όρια 0 και ∞ , υπολογίζουμε ότι $P(X \ge \alpha) = \frac{2}{3}\sum_{t=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^{t+\alpha} = (\frac{1}{3})^\alpha$. Τελικά, (1): $P(B|A) = \frac{(\frac{1}{3})^{\alpha+\beta}}{(\frac{1}{3})^\alpha} = (\frac{1}{3})^\beta = \frac{2}{3}\sum_{t=\beta}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t = P(X \ge \beta)$.

γ τρόπος) χρησιμοποιώντας τον τύπο για τα μερικά αθροίσματα της γεωμετρικής σειράς, $P(X \geq \alpha+\beta) = 1 - \sum_{x=0}^{\alpha+\beta-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 - \frac{2}{3}\frac{(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = (\frac{1}{3})^{\alpha+\beta}$. Ανάλογα $P(X \geq \alpha) = 1 - \sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 - \frac{2}{3}\frac{(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = (\frac{1}{3})^{\alpha}$. Οπότε φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, $P(B|A) = \frac{(\frac{1}{3})^{\alpha+\beta}}{(\frac{1}{3})^{\alpha}} = (\frac{1}{3})^{\beta} = \frac{2}{3}\sum_{t=\beta}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^t = P(X \geq \beta)$.

Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται ως «έλλειψη μνήμης», αφού το να λειτουργεί για τουλάχιστον α+β φορές δεν εξαρτάται από το πλήθος α των φορών που έχει ήδη λειτουργήσει αλλά αποκλειστικά από τις επιπλέον φορές β (αναμενόμενο αφού η τ.μ. που έχει δοθεί ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα "επιτυχίας" την πιθανότητα να χρειαστεί αλλαγή, $\theta = \frac{2}{3}$).

Α3. $\Pi(z) = E(z^x) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^x = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{2}{3}(\frac{z}{3})^x = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{2}{3-z}$, (για $0 < z < 1$), αποτέλεσμα που θα μπορούσαμε να πάρουμε απευθείας με χρήση του τυπολογίου και της γεωμετρικής κατανομής. $EX = \Pi'(z)|_{z=1} = \frac{2}{(3-z)^2}|_{z=1} = \frac{1}{2}$, $EX(X-1) = \Pi''(z)|_{z=1} = \frac{4}{(3-z)^3}|_{z=1} = \frac{1}{2}$ και τελικά $VarX = \Pi''(1) + \Pi'(1) - (\Pi'(1))^2 = \frac{3}{4}$, αποτελέσματα που μπορούν επίσης να επαληθευτούν από το τυπολόγιο (χωρίς όμως να χρησιμοποιηθούν οι τύποι του τυπολογίου αφού στην εκφώνηση ήταν ξεκάθαρο ότι ο υπολογισμός τους πρέπει να γίνει με χρήση της πιθανογεννήτριας).

ΘΕΜΑ 7: (Α) Να αποδείξετε ότι αν δυο ανεξάρτητες τ.μ. X ,Y ακολουθούν κατανομές Poisson, $P(\lambda)$ και $P(\mu)$ αντίστοιχα τότε η τ.μ. $Z = X + Y$ ακολουθεί την Poisson $P(\mu + \lambda)$. **(Β)** Σ' ένα κατάστημα το πλήθος των πελατών που έρχονται για αλλαγή των προϊόντων ανά 3 ώρες ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 3 πελάτες. **(Β1)** Υπολογίστε την πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον ένας πελάτης στο διάστημα μιας ώρας. **(Β2)** Υπολογίστε την πιθανότητα, το σύνολο των πελατών που θα έρθουν για αλλαγή σε 2 διαφορετικά τρίωρα να είναι το πολύ 3.
Απάντηση:

Α. Γνωρίζουμε ότι η κατανομή του αθροίσματος δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, μπορεί να αναγνωριστεί από την πιθανογεννήτρια του αθροίσματος η οποία στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται από το γινόμενο των πιθανογεννητριών. Από το τυπολόγιο έχουμε ότι $M_X(t) = e^{-\lambda(1-t)}$ και $M_Y(t) = e^{-\mu(1-t)}$, επομένως $M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) e^{-(\lambda+\mu)(1-t)}$. Η τελευταία συνάρτηση αποτελεί την πιθανογεννήτρια μιας κατανομής Poisson με παράμετρο $(\lambda + \mu)$.

(Β1) Θεωρούμε το διάστημα (0, 1) και την τ.μ. $X(1)$ του πλήθους των πελατών που φθάνουν στο διάστημα (0, 1), (ανέλιξη Poisson). Στο διάστημα αυτό ο αναμενόμενος αριθμός πελατών είναι ίσος με $\lambda_1 = \frac{3}{3} = 1$, έτσι $P(X(1) \geq 1) = 1 - P(X(1) = 0) = 1 - e^{-1}\frac{1^0}{0!} = 0.6321$.

(Β2) Αν Χ είναι το πλήθος των πελατών στο ένα από τα δυο τρίωρα και Υ στο άλλο, τότε η τ.μ. που εκφράζει το σύνολο δηλαδή το άθροισμα των πελατών στα δυο τρίωρα είναι η $Z = X + Y$, η οποία όπως αποδείξαμε στο ερώτημα Α1, λόγω της ανεξαρτησίας των τ.μ., ακολουθεί την Poisson κατανομή $P(3 + 3)$ δηλαδή την $P(6)$. Επομένως ζητείται η πιθανότητα $P(Z \leq 3) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} + e^{-6}\frac{6^1}{1!} + e^{-6}\frac{6^2}{2!} + e^{-6}\frac{6^3}{3!} = 0.1512$.

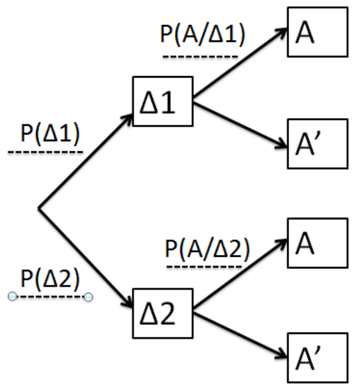
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι Φεβρουάριος 2018 Σειρά $\boxed{\mathbf{B}}$

Θέματα 3 ως 7 και αναλυτικές (ή σύντομες) απαντήσεις

ΘΕΜΑ 3: Το δοχείο Δ1 περιέχει 3 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες ενώ το δοχείο Δ2 περιέχει 4 άσπρες και 6 μαύρες μπάλες. Ρίχνουμε ένα ζάρι και αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του 5 επιλέγουμε τυχαία χωρίς επανάθεση 2 μπάλες από το Δ1 αλλιώς από το Δ2. **(Α1)** Ποια η πιθανότητα να πάρουμε 1 άσπρη και 1 μαύρη; **(Α2)** Ποια η πιθανότητα να είχαμε επιλέξει τις μπάλες από το δοχείο Δ1 αν πήραμε 1 άσπρη και 1 μαύρη;

Απάντηση:

Συμβολίζουμε τα γεγονότα: Δ1={επιλέγουμε από το δοχείο Δ1}, Δ2={επιλέγουμε από το δοχείο Δ2}, Α={επιλέγουμε 1 άσπρη και 1 μαύρη} και με Ζ την τυχαία μεταβλητή με τιμές το αποτέλεσμα του ζαριού (ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη με $p_i = \frac{1}{6}, i = 1, 2, \dots, 6$). Η επιλογή του δοχείου καθορίζεται από το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού επομένως $P(\Delta 1) = P(Z < 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Αντίστοιχα $P(\Delta 2) = 1 - P(Z > 5) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$. Το γράφημα που περιγράφει το πείραμα δίνεται στην διπλανή εικόνα.



Α1. $P(A) = P(\Delta 1) \cdot P(A|\Delta 1) + P(\Delta 2) \cdot P(A|\Delta 2) \quad (1)$

Η επιλογή από κάθε δοχείο γίνεται χωρίς επανάθεση επομένως η πιθανότητα επιλογής τυχαίου δείγματος μεγέθους ν με κ άσπρες και μ μαύρες μπάλες (κ+μ=ν) υπολογίζεται με χρήση της υπεργωμετρικής κατανομής, έτσι: (1) : $P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{337}{630} = 0.535$

Α2. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bayes $P(\Delta 1|A) = \frac{P(A\Delta 1)}{P(A)} = \frac{P(\Delta 1)\cdot P(A|\Delta 1)}{P(\Delta 1)\cdot P(A|\Delta 1) + P(\Delta 2)\cdot P(A|\Delta 2)} = 0.668.$

ΘΕΜΑ 4: Για μια ερώτηση επιλογής με 5 απαντήσεις εκ των οποίων μόνο η μια είναι σωστή, υποθέτουμε ότι από το σύνολο των φοιτητών που εξετάζονται μόνο το 30% γνωρίζει την απάντηση. **(Α1)** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα φοιτητή ποια η πιθανότητα να απαντήσει σωστά; **(Α2)** Η εξέταση αποτελείται από 35 ερωτήσεις αυτού του είδους, ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ποια η πιθανότητα ο φοιτητής ν' απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 17 αλλά λιγότερες από 21 από τις ερωτήσεις;

Απάντηση:

Συμβολίζουμε τα γεγονότα: Γ={ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση}, Σ={ο φοιτητής απαντά σωστά}. Επιλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή, επομένως $P(\Gamma) = 0.3$. Αν ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση, $P(\Sigma|\Gamma) = 1$, αν δε γνωρίζει απαντά στην τύχη (επιλέγει τυχαία μια στις πέντε), επομένως $P(\Sigma|\Gamma') = \frac{1}{5} = 0.2$.

Α1. Επιλέγοντας τυχαία έναν φοιτητή ισχύουν αυτά που γράψαμε προηγούμενα, επομένως $P(\Sigma) = P(\Gamma) \cdot P(\Sigma|\Gamma) + P(\Gamma') \cdot P(\Sigma|\Gamma') = 0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.44$

Α2. Κάθε ερώτηση αποτελεί μια δοκιμή Bernoulli για τον τυχαία επιλεγμένο φοιτητή με πιθανότητα επιτυχίας ίση με 0.44 όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα Α1. Επομένως η τ.μ. Χ που μετρά το πλήθος των σωστών απαντήσεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή Β(35, 0.44) και η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(17 \le X < 21) = P(17 \le X \le 20)$. Πρακτικά για πλήθος επαναλήψεων μεγαλύτερο ή ίσο του 30 η παραπάνω πιθανότητα προσεγγίζεται σχετικά ικανοποιητικά με τη βοήθεια της κανονικής κατανομής $N(35 \cdot 0.44,\ 35 \cdot 0.44 \cdot (1 - 0.44))$ ή $N(15.4,\ 8.624)$. Χρησιμοποιώντας τη διόρθωση συνέχειας βρίσκουμε: $P(17 \le X \le 20) = P\left(\frac{17-0.5-15.4}{2.9367} \le Z \le \frac{20+0.5-15.4}{2.9367}\right) = P(0.375 \le Z \le 1.737) = \Phi(1.737) - \Phi(0.375) = \cdots = 0.3126.$

ΘΕΜΑ 5: Η τ.μ. X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. **(Α1)** Να βρείτε τις συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής της τ.μ. $Y = \frac{\sqrt{X}}{2}$. **(Α2)** Να βρείτε ένα κάτω φράγμα της πιθανότητας $P(\frac{1}{6} < Y < \frac{1}{2})$ με χρήση της ανισότητας Chebyshev ($P(|X - \mu| \ge k \cdot \sigma) \le 1/k^2$).

Απάντηση:

Α1. Η τ.μ. ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 1\ όταν\ \ 0 < x < 1$ και 0 αλλού. Η συνάρτηση τ.μ. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1], έχει αντίστροφη την $\varphi^{-1}(y) = 4y^2$ και θετική πυκνότητα στο διάστημα $(0,\frac{1}{2})$. Με εφαρμογή του Θ.4.4, η συνάρτηση π.π. της Y δίνεται από τη σχέση

$f_Y(y) = 1 \cdot \left|\frac{d(4y^2)}{dy}\right| = 8y$, έτσι : η σ.π.π. είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} 8y & y\epsilon(0,\frac{1}{2}) \\ 0 & αλλού \end{cases}$$

Για τη σ.κ. έχουμε:

όταν $y < 0$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} 0dy = 0$,

όταν $0 \le y < \frac{1}{2}$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{y} 8tdt = \cdots = 4y^2$ και όταν $y \ge \frac{1}{2}$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 8ydy + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 0dy = 1$, επομένως :

$$\text{η σ.κ. είναι } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 4y^2 & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 1 & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Α2. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την διασπορά της Y.

$EY = \int_0^1 y \cdot 8ydy = \cdots = \frac{1}{3}$ και $EY^2 = \int_0^1 y^2 \cdot 2ydy = \cdots = \frac{1}{8}$ άρα VarX=$\sigma^2 = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{72}$ και $\sigma = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

Το ζητούμενο κάτω φράγμα υπολογίζεται από την ανισότητα Chebyshev: $P(|X-\mu| \ge k\cdot\sigma) \le 1/k^2 \iff 1 - P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) \le 1/k^2 \iff P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) \ge 1 - 1/k^2$. Για τη δοσμένη πιθανότητα έχουμε $P\left(\frac{1}{6} < Y < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} < Y - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{6} < Y - \frac{1}{3} < \frac{1}{6}\right) = P\left(\left|Y - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6}\right) = P\left(\left|Y - \frac{1}{3}\right| < \sqrt{2}\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) \ge 1 - \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 6: Η τ.μ. X μετρά πόσες φορές ένας διακόπτης λειτουργεί πριν χρειαστεί αλλαγή και έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = h \cdot (\frac{2}{3})^x,\ x = 0,1,2,\ldots.$ **(Α1)** Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς h ώστε η $f(x)$ να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας. **(Α2)** Έστω τα γεγονότα, Α: «ο διακόπτης λειτουργεί τουλάχιστον κ φορές» και Β: «ο διακόπτης λειτουργεί τουλάχιστον $\kappa + \lambda$ φορές». Υπολογίστε την πιθανότητα $P(B|A)$ και δώστε την ερμηνεία του αποτελέσματος. **(Α3)** Βρείτε την πιθανογεννήτρια της τ.μ. X και χρησιμοποιείστε αυτή για να υπολογίσετε τις παραμέτρους EX και $VarX$.

Απάντηση:

Α1. Η τ.μ. X είναι διακριτή (απαριθμητή), επομένως πρέπει (ι) $f(x) \ge 0$, και (ιι) $\sum_0^\infty f(x) = 1$. Από την (ιι) βασιζόμενοι στη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς έχουμε: $\sum_0^\infty c(\frac{2}{3})^x = 1 \iff c \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1 \iff c = \frac{1}{3}$

Α2. $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ (1) Είναι $\kappa, \lambda \ge 0$, έτσι για τον αριθμητή το σύστημα ανισώσεων: $x \ge \kappa\ \ και\ \ x \ge \kappa + \lambda$, συνεπάγεται $x \ge \kappa + \lambda$, επομένως $P(AB) = P(X \ge \kappa + \lambda)$. Αντιστοίχως $P(A) = P(X \ge \kappa)$. Μπορούμε να συνεχίσουμε με τρεις τρόπους:

α τρόπος) με αλλαγή μεταβλητής στο δείκτη, $t = x - \kappa$, οπότε $x = t + \kappa$ για τον αριθμητή έχουμε νέα όρια, λ και ∞, ενώ $P(X \ge \kappa + \lambda) = \frac{1}{3}\sum_{x=\kappa+\lambda}^{\infty} (\frac{2}{3})^x = \frac{1}{3}\sum_{t=\lambda}^{\infty} (\frac{2}{3})^{t+\kappa} = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^\kappa \sum_{t=\lambda}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^t$. Για τον παρονομαστή αντίστοιχα τα όρια είναι 0 και ∞ ενώ $P(X \ge \kappa) = \frac{1}{3}\sum_{x=\kappa}^{\infty} (\frac{2}{3})^x = \frac{1}{3}\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{t+\kappa} = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^\kappa \sum_{t=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^t = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^\kappa \cdot 3 = (\frac{2}{3})^\kappa$. Τελικά, (1): $P(B|A) = \frac{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^\kappa \sum_{t=\lambda}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^t}{(\frac{2}{3})^\kappa} = \frac{1}{3}\sum_{t=\lambda}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^t = P(X \ge \lambda)$.

β τρόπος) $P(X \ge \kappa + \lambda) = \sum_{x=\kappa+\lambda}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^x = \frac{1}{3}\sum_{x=\kappa+\lambda}^{\infty} (\frac{2}{3})^x$, με αλλαγή μεταβλητής στο δείκτη, $t = x - \kappa - \lambda$ και νέα όρια, 0 και ∞, έχουμε $P(X \ge \kappa + \lambda) = \frac{1}{3}\sum_{t=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^{t+\kappa+\lambda} = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{\kappa+\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^t = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{\kappa+\lambda}\frac{3}{2} = (\frac{2}{3})^{\kappa+\lambda}$. Αναλόγως, με αλλαγή μεταβλητής στον δείκτη $t = x - \kappa$ και νέα όρια 0 και ∞ , υπολογίζουμε (όπως και παραπάνω) ότι $P(X \geq \kappa) = \frac{1}{3}\sum_{t=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^{t+\kappa} = (\frac{2}{3})^{\kappa}$. Τελικά, (1): $P(B|A) = \frac{(\frac{2}{3})^{\kappa+\lambda}}{(\frac{2}{3})^{\kappa}} = (\frac{2}{3})^{\lambda} = \frac{1}{3}\sum_{t=\lambda}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{t} = P(X \geq \lambda)$.

γ τρόπος) χρησιμοποιώντας τον τύπο για τα μερικά αθροίσματα της γεωμετρικής σειράς, $P(X \geq \kappa + \lambda) = 1 - \sum_{x=0}^{\kappa+\lambda-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1 - \frac{1}{3}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa+\lambda}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = (\frac{2}{3})^{\kappa+\lambda}$. Ανάλογα $P(X \geq \kappa) = 1 - \sum_{x=0}^{\kappa-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1 - \frac{1}{3}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = (\frac{2}{3})^{\kappa}$. Οπότε φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, $P(B|A) = \frac{(\frac{2}{3})^{\kappa+\lambda}}{(\frac{2}{3})^{\kappa}} = (\frac{2}{3})^{\lambda} = \frac{1}{3}\sum_{t=\lambda}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{t} = P(X \geq \lambda)$.

Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται ως «έλλειψη μνήμης», αφού το να λειτουργεί για τουλάχιστον κ+λ φορές δεν εξαρτάται από το πλήθος κ των φορών που έχει ήδη λειτουργήσει αλλά αποκλειστικά από τις επιπλέον φορές λ (αναμενόμενο αφού η τ.μ. που έχει δοθεί ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα "επιτυχίας" την πιθανότητα να χρειαστεί αλλαγή, $\theta = \frac{1}{3}$).

Α3 . $\Pi(z) = E(z^{x}) = \sum_{x=0}^{\infty} z^{x}\, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{x} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2z}{3})^{x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2z}{3}} = \frac{1}{3-2z}$, (για $0 < z < 1$), αποτέλεσμα που θα μπορούσαμε να πάρουμε απευθείας με χρήση του τυπολογίου και της γεωμετρικής κατανομής. $EX = \Pi'(z)|_{z=1} = \frac{2}{(3-2z)^2}|_{z=1} = 2$, $EX(X-1) = \Pi''(z)|_{z=1} = \frac{8}{(3-2z)^3}|_{z=1} = 8$ και τελικά $VarX = \Pi''(1) + \Pi'(1) - (\Pi'(1))^2 = 6$, αποτελέσματα που μπορούν επίσης να επαληθευτούν από το τυπολόγιο (χωρίς όμως να χρησιμοποιηθούν οι τύπο του τυπολογίου αφού στην εκφώνηση ήταν ξεκάθαρο ότι ο υπολογισμός τους πρέπει να γίνει με χρήση της πιθανογεννήτριας).

ΘΕΜΑ 7: **(Α)** Να αποδείξετε ότι αν δυο ανεξάρτητες τ.μ. X_1 , X_2 ακολουθούν κατανομές Poisson, $P(\lambda)$ και $P(\mu)$ αντίστοιχα τότε η τ.μ. $Z = X_1 + X_2$ ακολουθεί την Poisson $P(\mu + \lambda)$. **(Β)** Σ' ένα κατάστημα το πλήθος των πελατών που έρχονται για αλλαγή των προϊόντων ανά 2 ώρες ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 2 πελάτες. **(Β1)** Υπολογίστε την πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον ένας πελάτης στο διάστημα μιας ώρας. **(Β2)** Υπολογίστε την πιθανότητα, το σύνολο των πελατών που θα έρθουν για αλλαγή σε 2 διαφορετικά δίωρα να είναι το πολύ 3.
Απάντηση:

Α. Γνωρίζουμε ότι η κατανομή του αθροίσματος δυο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, μπορεί να αναγνωριστεί από την πιθανογεννήτρια του αθροίσματος η οποία στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται από το γινόμενο των πιθανογεννητριών. Από το τυπολόγιο έχουμε ότι $M_{X_1}(t) = e^{-\lambda(1-t)}$ και $M_{X_2}(t) = e^{-\mu(1-t)}$, επομένως $M_Z(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) = e^{-(\lambda+\mu)(1-t)}$. Η τελευταία συνάρτηση αποτελεί τη πιθανογεννήτρια μιας κατανομής Poisson με παράμετρο $(\lambda + \mu)$.

(Β1) Θεωρούμε το διάστημα (0, 1) και την τ.μ. $X(1)$ του πλήθους των πελατών που φθάνουν στο διάστημα (0, 1), (ανέλιξη Poisson). Στο διάστημα αυτό ο αναμενόμενος αριθμός πελατών είναι ίσος με $\lambda_1 = \frac{2}{2} = 1$, έτσι $P(X(1) \geq 1) = 1 - P(X(1) = 0) = 1 - e^{-1}\frac{1^0}{0!} = 0.6321$.

(Β2) Αν X_1 είναι το πλήθος των πελατών στο ένα από τα δυο τρίωρα και X_2 στο άλλο, τότε η τ.μ. που εκφράζει το σύνολο δηλαδή το άθροισμα των πελατών στα δυο ξένα μεταξύ τους τρίωρα είναι η $Z = X_1 + X_2$, η οποία όπως αποδείξαμε στο ερώτημα Α1, λόγω της ανεξαρτησίας των τ.μ., ακολουθεί την Poisson κατανομή $P(2 + 2)$ δηλαδή την $P(4)$. Επομένως ζητείται η πιθανότητα $P(Z \leq 3) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} + e^{-4}\frac{4^2}{2!} + e^{-4}\frac{4^3}{3!} = 0.4854$.