ΜΟΝΤΕΡΝΑ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΙΙ

Τμήμα Μαθηματικών - Τομέας Υπολογιστών & Αριθμητικής Ανάλυσης

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1. α) (Μον.1.5) Αποδείξτε ότι αν το σύστημα στο χώρο καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό ομοιότητας $x(t) = T\tilde{x}(t)$ το νέο σύστημα που θα πάρω

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$

θα είναι στην ελέγξιμη μορφή δηλ.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\det(sI_n - A) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$.

β) (Μον.1.0) Εξετάστε το παραπάνω ερώτημα στην περίπτωση που

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θέμα 2. α) (Μον. 1.5) Έστω η περιγραφή ενός συστήματος στον χώρο των καταστάσεων :

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} \mathrm{x}(\mathrm{t}) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{u}(\mathrm{t})$$

Να υπολογιστεί η απόκριση $x(t)$ του συστήματος , όταν $\mathrm{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = 1, \mathrm{t} \geq 0$, $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = 0, \mathrm{t} < 0$.

β) (Μον. 1)Έστω $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$. Να ελέγξετε το σύστημα ως προς την εσωτερική αλλά και εξωτερική ευστάθεια.

Θέμα 3. α) (Μον.1) Η δυναμική συμπεριφορά ενός γραμμικού συστήματος περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

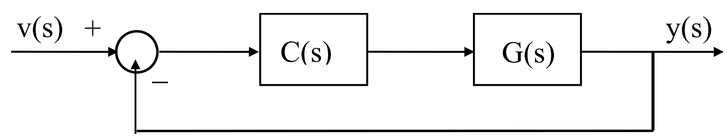
$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{dy}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} - 2\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{u}(\mathrm{t}) \quad (\Sigma)$$

όπου $\mathrm{u}(\mathrm{t}) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι η είσοδος και $\mathrm{y}(\mathrm{t}) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ η έξοδος του συστήματος. Διαλέγοντας ως καταστάσεις $x_1(t), x_2(t)$ την έξοδο y(t) και την ταχύτητα μεταβολής της εξόδου dy/dt αντίστοιχα, να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής.

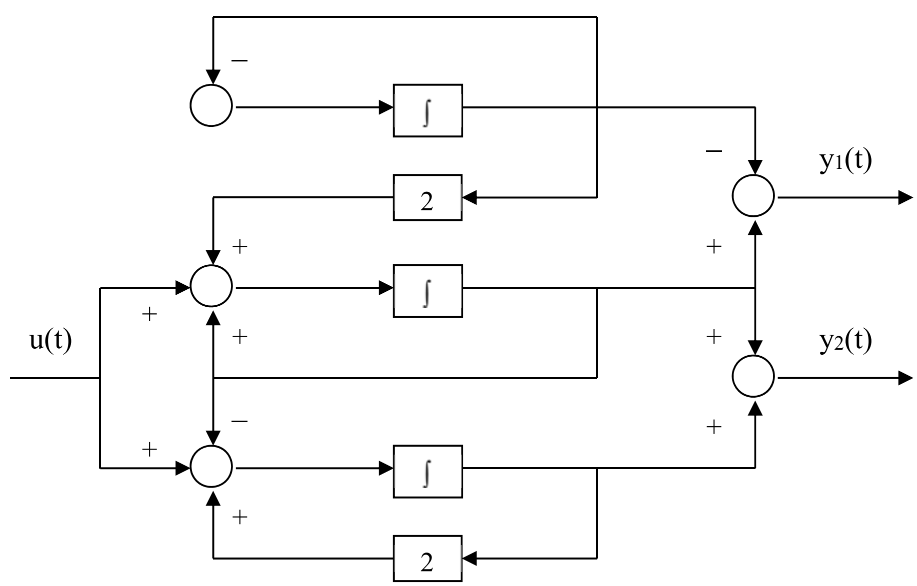
β) (Μον.1) Να υπολογίσετε ανάδραση κατάστασης της μορφής $u(t) = -Kx(t) + v(t)$ η οποία να επανατοποθετεί τους πόλους του συστήματος στις θέσεις {-2+2I, -2-2I} και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής του κλειστού συστήματος.

γ) (Μον.2) Έστω ότι το διάνυσμα κατάστασης x(t) δεν μπορεί να μετρηθεί. Να βρεθεί ανάδραση του ανύσματος κατάστασης με χρήση παρατηρητή κατάστασης Luenberger, ώστε το κλειστό σύστημα να έχει ιδιοτιμές {-2+2I, -2-2I} και ο παρατηρητής να έχει ιδιοτιμές -4, -6. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής του κλειστού συστήματος.

δ) (Μον.1) Έστω G(s) η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (Σ). Να υπολογιστεί ελεγκτής C(s) ο οποίος αν εφαρμοστεί στο παρακάτω κλειστό σύστημα θα μεταφέρει τους πόλους του συστήματος στις θέσεις $\{-2 \pm 2i, -4, -6\}$.



Θέμα 4. (Μον.1) Δίδεται το παρακάτω διάγραμμα ροής ενός συστήματος **μιας** εισόδου και **δύο** εξόδων



Να γίνει περιγραφή του παραπάνω συστήματος στον χώρο των καταστάσεων.

Σημείωση. Το σύνολο της βαθμολογίας είναι 11 μονάδες. Άριστα είναι το 10.

Καλή επιτυχία

1 Θέμα 1ο

α) Εφόσον το σύστημα είναι ελέγξιμο, γνωρίζουμε ότι πράγματι υπάρχει μετασχηματισμός ο οποίος το οδηγεί στην ελέγξιμη μορφή, ο οποίος μάλιστα έχει τη μορφή

$$T = \ell\tilde{\ell}^{-1} \tag{1}$$

Όπου $\ell, \tilde{\ell}$ οι πίνακες ελεγξιμότητας του αρχικού συστήματος, και του μετασχηματισμένου συστήματος αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο παρακάτω

$$T = \ell\tilde{\ell}^{-1} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Αυτό θα πρέπει να είναι γνωστό, εφόσον θα χρειαστεί και στις παρακάτω ασκήσεις. Το θέμα εδώ είναι να αποδείξουμε κιόλας οτι πράγματι αυτός είναι ο πίνακας μετασχηματισμού. Αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό $x(t) = T\tilde{x}(t)$ έχουμε

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow T\dot{\tilde{x}}(t) = AT\tilde{x}(t) + Bu(t) \overset{T^{-1}\times}{\Rightarrow} \dot{\tilde{x}}(t)(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \tag{3}$$

Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $\tilde{A} = T^{-1}AT$ και $\tilde{B} = T^{-1}B$. Αρχικά, από το θεώρημα $Cayley - Hamilton$ ξέρουμε πως ο A ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Άρα

$$\psi(A) = 0 \Rightarrow A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I_3 = 0 \Rightarrow A^3 = -a_2A^2 - a_1A - a_0I_3 \tag{4}$$

Πολλαπλασιάζοντας με B από τα δεξιά έχουμε

$$A^3B = -a_2A^2B - a_1AB - a_0B = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Για την πρώτη σχέση, έχουμε

$$AT = A\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

με απλή άλγεβρα πινάκων και με χρήση της (5) η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$AT = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tag{7}$$

$$AT = \underbrace{\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} = T\tilde{A} \tag{8}$$

Δηλαδή

$$AT = T\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = T^{-1}AT \tag{9}$$

Δείξαμε επομένως την 1η σχέση. Για τη 2η έχουμε

$$T\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B \tag{10}$$

Δηλαδή

$$T\tilde{B} = B \Rightarrow \tilde{B} = T^{-1}B \tag{11}$$

Δείξαμε επομένως και τη 2η σχέση.

β) Για το 2ο ερώτημα, εφόσον γνωρίζουμε πως ο πίνακας μετασχηματισμού θα πρέπει να είναι ο (1), αρκεί να βρούμε τον πίνακα $\tilde{\ell}^{-1}$ και θα ξέρουμε ποιος είναι ο νέος πίνακας T. Για τους νεους πίνακες θα έχουμε

$$\tilde{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & -a_0 & a_0^2 - a_1 \\ 0 & 1 & -a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

και

$$\tilde{\ell}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Άρα με χρηση του πίνακα

$$T = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

μπορούμε να δείξουμε τις ίδιες σχέσεις με πριν ακολουθώντας την ίδια διαδικασία.

2 Θέμα 2ο

α) Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό *Laplace* στο σύστημα και έχουμε

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow \tag{15}$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow \tag{16}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(x(0) + BU(s)) \tag{17}$$

όπου $U(s) = \frac{1}{s}$. Υπολογίζουμε

$$x(0) + BU(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{s} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{s} \\ -1 + \frac{2}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} \\ \frac{-s+2}{s} \end{pmatrix} \tag{18}$$

και

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7+s}{-3+2s+s^2} & \frac{4}{-3+2s+s^2} \\ -\frac{8}{-3+2s+s^2} & \frac{-5+s}{-3+2s+s^2} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Συνολικά:

$$X(s) = \begin{pmatrix} \frac{(1+s)^2}{s(-3+2s+s^2)} \\ -\frac{2+s+s^2}{s(-3+2s+s^2)} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Θα αναλύσουμε κάθε κλάσμα ξεχωριστά για να βρούμε τις δύο αποκρίσεις. Αρχικά για την $x_1(t)$ έχουμε

$$X_1(s) = \frac{(1+s)^2}{s\,(-3+2s+s^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3} \tag{21}$$

Υπολογίζουμε τους αριθμητές με τη μέθοδο που έχουμε διδαχθεί στο μάθημα και παίρνουμε

$$X_1(s) = -\frac{1}{3s} + \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{3(3+s)} \tag{22}$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* έχουμε

$$x_1(t) = (-\frac{1}{3} + e^t + \frac{1}{3}e^{-3t})u(t) \tag{23}$$

Το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική συνάρτηση $u(t)$ για να τονίσουμε οτι η απόκριση ξεκινάει από τη χρονική στιγμή $t \geq 0$. Ομοίως για τη δεύτερη κατάσταση $x_2(t)$ έχουμε

$$X_2(s) = \frac{2}{3s} - \frac{1}{-1+s} - \frac{2}{3(3+s)} \tag{24}$$

επομένως η απόκριση είναι

$$x_2(t) = (\frac{2}{3} - e^t - \frac{2}{3}e^{-3t})u(t) \tag{25}$$

β) Για την εξωτερική ευστάθεια, κοιτάμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $(sI - A)$

$$\det(sI - A) = (s-1)(3+s) \tag{26}$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι 1,-3. Η μια από αυτές είναι ασταθής, επομένως το σύστημα είναι εσωτερικά ασταθές.

Για την εξωτερική ευστάθεια, βλέπουμε τους πόλους της σ.μ.

$$G(s)C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s}{3+s} \tag{27}$$

Εδώ βλέπουμε οτι έχει γίνει μια απλοποίηση και το μηδενικό στο +1 έχει εξαφανιστεί. Ο πόλος είναι στο -3, επομένως το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές.

3 Θέμα 3ο

α) Ορίζουμε $y(t) = x_1(t)$, $\dot{y}(t) = x_2(t)$ και παίρνουμε

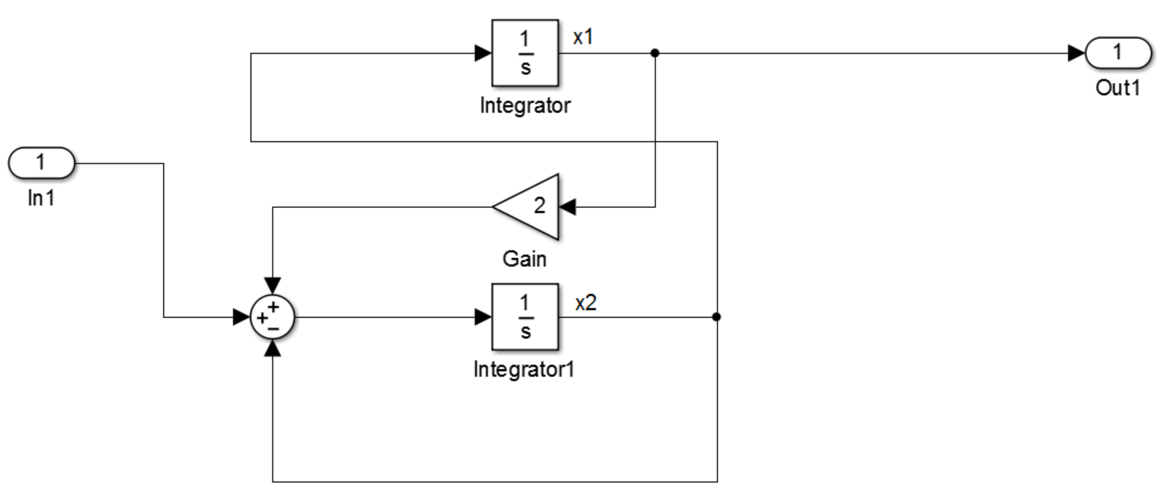
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 2x_1(t) = u(t) \tag{28}$$

Οι δύο εξισώσεις του $state - space$ συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \tag{29}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Το διάγραμμα του συστήματος είναι αυτό στην Εικόνα 1.



β) Το σύστημα βρίσκεται στην κανονική μορφή ελεγξιμότητας (άρα σαφώς αφού βρίσκεται σε αυτή τη μορφή θα είναι και ελέγξιμο). Το επιθυμητό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$p(s) = s^2 + 4s + 8 \tag{31}$$

Άρα ο πίνακας του επιθυμητού συστήματος μετά την ανάδραση θα πρέπει να είναι ο

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Για ανάδραση της μορφής $u(t) = -Kx(t) + v(t)$ ο πίνακας του κλειστού συστήματος θα είναι

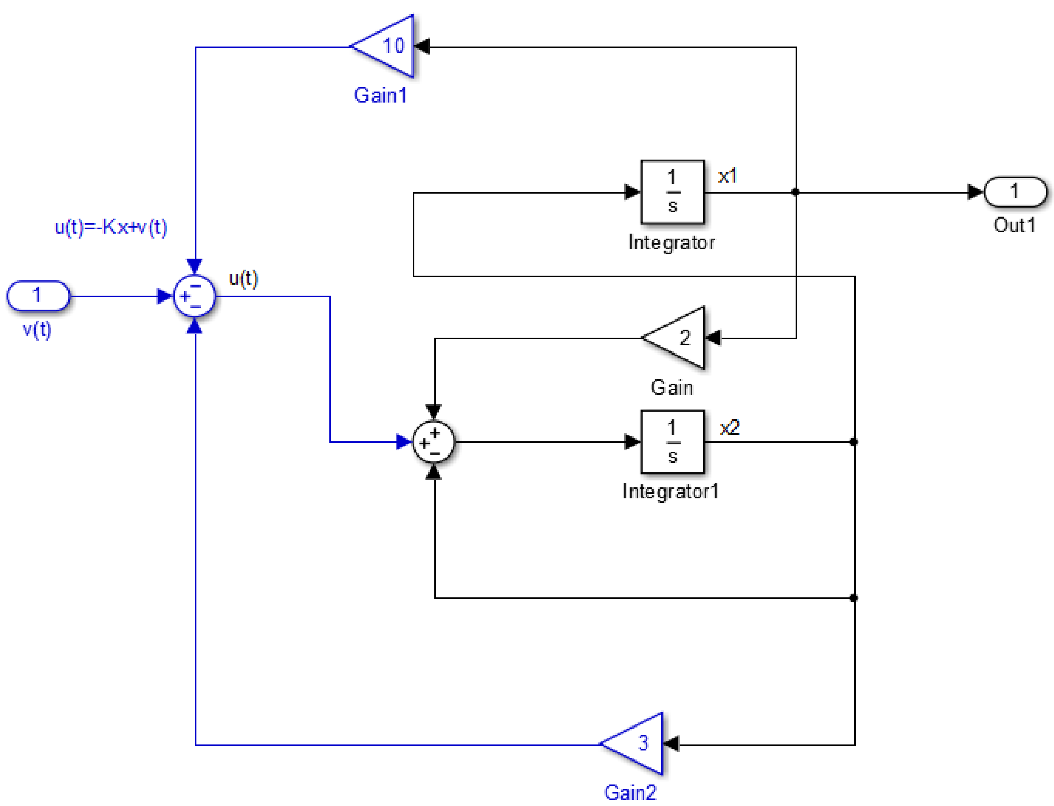
$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 - k_1 & -1 - k_2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Ο πίνακας (32) θα πρέπει να ταυτίζεται με τον επιθυμητό πίνακα (31), επομένως θα πρέπει

$$2 - k_1 = -8 \Rightarrow k_1 = 10 \tag{34}$$

$$-1 - k_2 = -4 \Rightarrow k_2 = 3 \tag{35}$$

Το διαγραμμα ροής του συστήματος με ανάδραση φαίνεται στην Εικόνα 2.



γ) Πρέπει να βρούμε ανάδραση κατάστασης της μορφής $u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$. Αρχικά, ας σχεδιάσουμε τον παρατηρητή. Θα ελέγξουμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

$$rank \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = 2 \tag{36}$$

επομένως το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Ο παρατηρητής θα έχει τη μορφή.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \Rightarrow \tag{37}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + LCx(t) + Bu(t) \tag{38}$$

Πρέπει να βρουμε τον πίνακα $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ ώστε ο παρατηρητής να έχει του επιθυμητούς πόλους. Μπορούμε να τον υπολογίσουμε ανάγοντας το δυικό σύστημα (με πίνακες (A^T, C^T)) σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας και κάνοντας εκεί την τοποθέτηση. Όμως, αφού το σύστημα είναι 2-επί-2, μπορούμε πιο απλά υπολογίζοντας την ορίζουσα του $A - LC$ στην (38) και ταυτίζοντας την με το επιθυμητό πολυώνυμο, το οποίο είναι

$$p(s) = (s + 4)(s + 6) = s^2 + 10s + 24 \tag{39}$$

Το χ. πολυώνυμο του παρατηρητή είναι

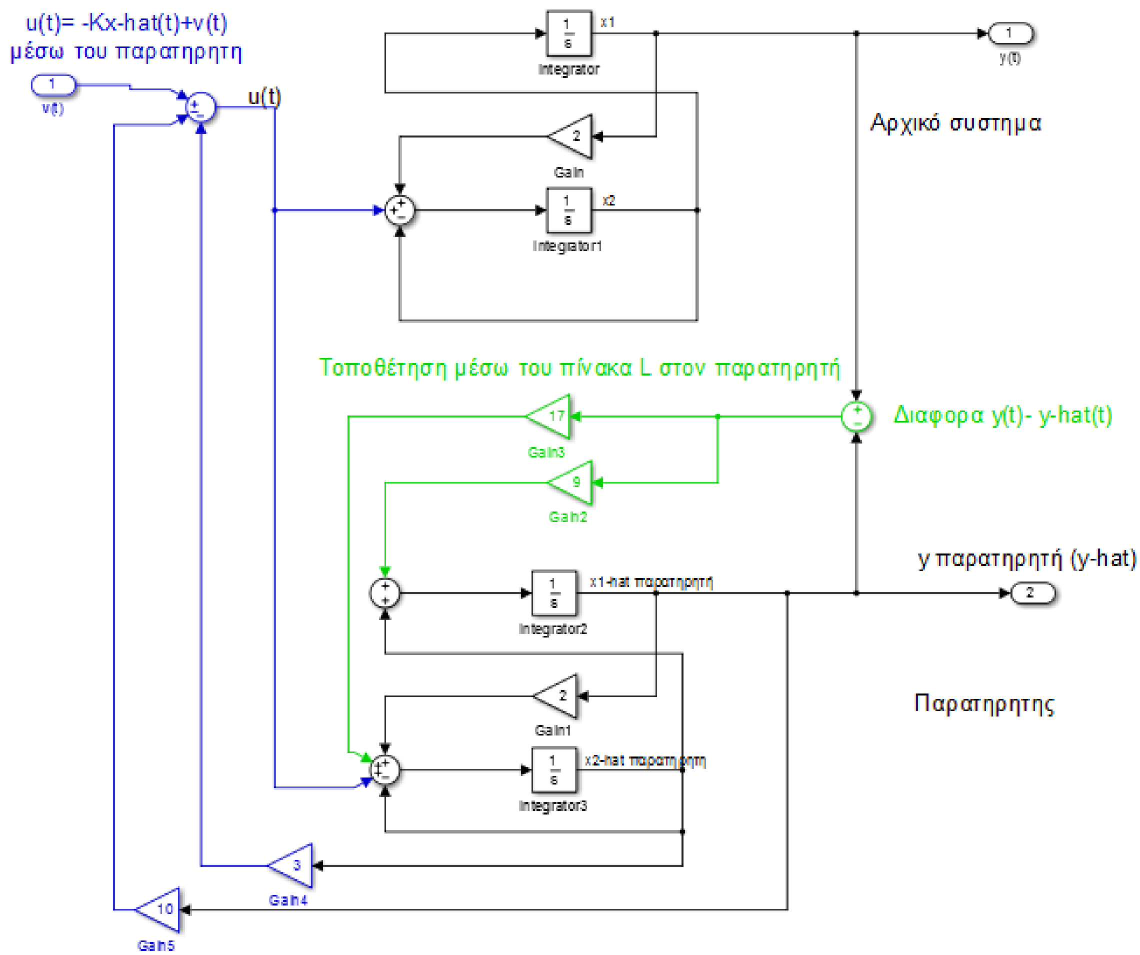
$$\det(sI - (A - LC)) = s^2 + (1 + l_1)s + l_1 + l_2 - 2 \tag{40}$$

επομένως πρέπει

$$1 + l_1 = 10 \Rightarrow l_1 = 9 \tag{41}$$

$$l_1 + l_2 - 2 = 24 \Rightarrow l_2 = 17 \tag{42}$$

Άρα βρήκαμε τον πίνακα του παρατηρητή. Για το αρχικό σύστημα, θα εφαρμόσουμε ανάδραση της μορφής $u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$. Βέβαια, αν και η ανάδραση γίνεται μέσω του παρατηρητή, η διαδικασία που ακολουθούμε για να υπολογίσουμε τον πίνακα ανάδρασης K είναι η ίδια με πριν. Άρα ξανά από τον $A - BK$ βρίσκουμε $K = \begin{pmatrix} 10 & 3 \end{pmatrix}$. Το διάγραμμα ροής βρίσκεται στην Εικόνα 3. Το κατασκευάσαμε χρησιμοποιώντας τη σχέση (37) και τη σχέση $u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$.



δ) Ο ζητούμενος ελεγκτής δίνεται από τη σχέση (που έχει αναπτυχθεί στο μάθημα):

$$C(s) = K(sI - A + LC + BK)^{-1}L = \frac{314 + 141s}{61 + 13s + s^2} \tag{43}$$

και το κλειστό σύστημα είναι

$$G_{closed}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{314 + 141s}{(4+s)(6+s)\left(8 + 4s + s^2\right)} \tag{44}$$

και βλέπουμε πως πράγματι έχει τους επιθυμητούς πόλους.

4 Θέμα 4ο

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \tag{45}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{46}$$