Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Τελική Εξέταση Σεπτεμβίου 2016

Λύσεις

Ομάδα Θεμάτων Α

1. Έστω $R = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(α΄) Έστω ϕ η συνάρτηση $\phi : R \to \mathbb{R}$, $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a$. Να εξετάσετε αν η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

Απάντηση Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Τότε $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, ενώ $AB = (c_{ij})$, όπου $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$. Έτσι, $\phi(A + B) = a_{11} + b_{11} = \phi(A) + \phi(B)$. Όμως, $\phi(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, ενώ $\phi(A)\phi(B) = a_{11}b_{11}$. Αν λοιπόν $a_{12}, b_{21} \neq 0$, τότε $\phi(AB) \neq \phi(A)\phi(B)$. Εν γένει λοιπόν $\phi(A)\phi(B) \neq \phi(AB)$ και ο ϕ ΔΕΝ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

(β΄) Να εξετάσετε αν το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων είναι ιδεώδες ή υποδακτύλιος του R.

Απάντηση Το μηδενικό στοιχείο του R, δηλ. ο μηδενικός πίνακας, δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Κάθε προσθετική υποομάδα ενός δακτυλίου πρέπει να περιέχει το μηδενικό στοιχείο του δακτυλίου. Άρα το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων ΔΕΝ είναι ιδεώδες ή υποδακτύλιος του R.

Για την ομάδα θεμάτων Β: Το σύνολο των πινάκων με μηδενική ορίζουσα δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση (προσοχή: $\det(A - B) \neq \det(A) - \det(B)$). Για παράδειγμα αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε $\det(A + B) = 1 \neq 0$. Άρα το σύνολο των πινάκων με μηδενική ορίζουσα δεν είναι προσθετική υποομάδα του R και ΔΕΝ είναι ιδεώδες ή υποδακτύλιος του R.

(γ΄) Να βρείτε ΟΛΑ τα αριστερά ιδεώδη που περιέχουν το στοιχείο $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Απάντηση Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in I$. Το μικρότερο αριστερό ιδεώδες του R που περιέχει τον A είναι το $RA = \{BA : B \in R\}$. Πρώτα, λοιπόν, υπολογίζουμε το RA. Αν

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ τότε } BA = \begin{bmatrix} 4b & 0 \\ 4d & 0 \end{bmatrix} \text{ επομένως } AR = \{\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & 0 \end{bmatrix} : \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Έστω, τώρα, ότι $I \neq RA$ και ότι $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in I \setminus RA$. Τότε b ή $d \neq 0$. Αν $b \neq 0$, τότε

$$\text{αφού } A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \in RA \subset I \Rightarrow A_2 = B - A_1 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in I \Rightarrow A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/b & 0 \end{bmatrix} A_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in I \text{ και αφού } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in RA \subset I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in I.$$

Άρα το μοναδιαίο στοιχείο του R ανήκει στο I και επομένως $I = R$. Ομοίως αν $d \neq 0$, πάλι μπορούμε με τον ίδιο τρόπ να δείξουμε ότι $I = R$. Δείξαμε λοιπόν ότι τα αριστερά ιδεώδη που περιέχουν το A είναι ακριβώς δύο, το RA και ο R.

Για την ομάδα θεμάτων Β: Υπάρχουν δύο δεξιά ιδεώδη που περιέχουν το στοιχείο $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: το CR (δηλ. οι πίνακες με μηδενική τη δεύτερη γραμμή τους) και ο R.

2. Έστω $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

   (α΄) Να βρείτε την χαρακτηριστική του R.

   Απάντηση Η χαρακτηριστική του R είναι το 12: $12(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$ και $m(\bar{1}, \bar{1}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$, για κάθε φυσικό αριθμό $m < 12$.

   (β΄) Να βρείτε όλα τα στοιχεία του ιδεώδους $J = \langle\ (\bar{2}, 0), (0, \bar{3})\ \rangle$ και να αποφασίσετε αν το J είναι κύριο ιδεώδες.

   Απάντηση Αφού ο R είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, $J = \{(\bar{2}, \bar{0})r + (0, \bar{3})s : r, s \in R\}$. Όμως αν r είναι της μορφής $(\overline{2n}, \overline{m})$ τότε $(\bar{2}, \bar{0})r = (\bar{0}, \bar{0})$, ενώ αν $r = (\overline{2n+1}, \overline{m})$ τότε $(\bar{2}, \bar{0})r = (\bar{2}, \bar{0})$. Αντίστοιχα για το $(\bar{0}, \bar{3})s$. Τελικά $J = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{3})\}$. Αφού

   $$(\bar{2}, \bar{3})(\bar{1}, \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{0}),\ (\bar{2}, \bar{3})(\bar{2}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{3}) \Rightarrow J = \langle(\bar{2}, \bar{3})\rangle.$$

3. Να αποδείξετε ότι αν $\phi : R \to S$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων, τότε $\ker\phi$ είναι ιδεώδες.

   Απάντηση $0 \in \ker\phi \Rightarrow \ker\phi \neq \emptyset$. Αν $x, y \in \ker\phi$, τότε $\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y) = 0 - 0 = 0$ και επομένως $x - y \in \ker\phi$. Αν $x \in \ker\phi$, $r \in R$, τότε $\phi(xr) = \phi(x)\phi(r) = 0\phi(r) = 0$, επομένως $xr \in \ker\phi$. Ομοίως, $\phi(rx) = \phi(r)\phi(x) = \phi(r)0 = 0$ και $rx \in \ker\phi$.

4. Έστω $R = \mathbb{Q}[x]$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι το ιδεώδες $J = \langle x^5 + 2x^3\rangle$ ΔΕΝ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

   Απάντηση $x^3(x^2 + 2) \in J$, ενώ $x^3 \notin J$ και $x^2 + 2 \notin J$ (όπως προκύπτει από τους βαθμούς των x^3, $x^2 + 2$ και $x^5 + 2x^3$).

   (β΄) Να αποδείξετε ότι $R = \langle x^5 + 2x^3, x + 1\rangle$.

   Απάντηση Από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο, γνωρίζουμε ότι $x^5 + 2x^3 = (x + 1)q(x) + r(x)$, όπου $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) = 0$. Αφού το -1 είναι ρίζα του $x+1$, αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, προκύπτει ότι $-3 = r(-1)$. Επομένως $r(x) \neq 0$ (δηλ. $r(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο), και αφού $\deg r(x) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $r(x) = -3$. Εναλλακτικά καταλήγουμε σε αυτό το συμπέρασμα κάνοντας αναλυτικά τις πράξεις του αλγορίθμου. Αφού $-3 = (x^5 + 2x) - (x + 1)q(x)$, συμπεραίνουμε ότι $-3 \in \langle x^5 + 2x^3, x + 1\rangle$. Άρα το ιδεώδες $\langle x^5 + 2x^3, x + 1\rangle$ περιέχει ένα αντιστρέψιμο στοιχείο και επομένως $\langle x^5 + 2x^3, x + 1\rangle = R$.

   (γ΄) Να εξετάσετε αν το στοιχείο $x^5 + J$ είναι διαιρέτης του μηδενός στον R/J.

   Απάντηση $x^5(x^2 + 2) = x^2(x^3(x^2 + 2)) \in J$. Αφού $x^5 \notin J \Rightarrow x^5 + J \neq J$ και $x^2 + 2 \notin J \Rightarrow x^2 + 2 + J \neq J$. Επομένως $x^5 + J$ είναι διαιρέτης του μηδενός στον R/J.

   (δ΄) Να εξετάσετε αν το στοιχείο $x^5 + J$ του R/J είναι ίσο με κάποιο(α) από τα (α) J (β) $2x^3 + J$, (γ) $-2x^3 + J$, (δ) $2x^6 + x^5 + 4x^4 + J$ (ε) $x^6 - 3x^5 + J$.

   Απάντηση Είναι ίσο με το (γ) και με το (δ).

   (ε΄) Να βρείτε ΟΛΑ τα ιδεώδη που περιέχουν το πολυώνυμο $x^5 + 2x^3$ και να σημειώσετε ποια από αυτά είναι μέγιστα.

   Απάντηση Αφού $\mathbb{Q}[x]$ είναι Π.Κ.Ι., κάθε ιδεώδες I του R είναι της μορφής $I = \langle g(x)\rangle$. Αν $x^5 + 2x^3 \in I$, τότε το $g(x)$ διαιρεί το $x^5 + 2x^3$. Άρα το $g(x)$ είναι κάποιος από τους παράγοντες του $x^5 + 2x^3$, δηλ. ένα από τα $1, x, x^2, x^3, x^2 + 3, x(x^2 + 3), x^2(x^2 + 3), x^3(x^2 + 3)$. Υπάρχουν λοιπόν 8 ιδεώδη που περιέχουν το J. Τα μέγιστα ιδεώδη είναι τα $\langle x\rangle$ και $\langle x^2 + 3\rangle$.

5. (α') Έστω $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, $f(x) \mapsto f(i\sqrt{7})$. Να αποδείξετε ότι $\ker\phi = \langle x^2+7\rangle$. Να συμπεράνετε ότι ότι $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2+7\rangle \cong \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

   Απάντηση Ο ϕ είναι ο ομομορφισμός εκτίμησης στο $i\sqrt{7}$ και είναι επιμορφισμός αφού ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ ορίζεται ως το σύνολο $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] = \{f(i\sqrt{7}) : f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.
   Αν $f(x) = (x^2+7)g(x)$ τότε $\phi(f(x)) = f(i\sqrt{7})g(i\sqrt{7}) = 0 \cdot g(i\sqrt{7}) = 0$ και άρα $f(x) \in \ker\phi$, συνεπώς $\langle x^2+7\rangle \subset \ker\phi$.

   Αν $f(x) \in \ker\phi$, τότε αφού ο αρχικός συντελεστής του x^2+7 είναι η μονάδα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο και $f(x) = (x^2+7)q(x) + r(x)$, όπου $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ και $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) \leq 1$. Άρα $f(x) = (x^2+7)q(x) + r(x)$, όπου $r(x) = ax + b$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$. Επομένως $f(i\sqrt{7}) = r(i\sqrt{7}) = 0$. Όμως, $ai\sqrt{7} + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ (αφού $a, b \in \mathbb{Z}$). Άρα $r(x) = 0$ και $f(x) \in \langle x^2+7\rangle$. Επομένως $\langle x^2+7\rangle = \ker\phi$.

   Σύμφωνα με το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Δακτυλίων, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2+7\rangle \cong \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

   (β') Να εξετάσετε αν $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ είναι ακεραία περιοχή, σώμα, περιοχή κυρίων ιδεωδών, Ευκλείδεια περιοχή.

   Απάντηση Παρατηρούμε ότι $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] = \{b + ai\sqrt{7} : b, a \in \mathbb{Z}\}$. Πράγματι, είδαμε παραπάνω, ότι αν $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, τότε $f(x) = (x^2+7)q(x) + r(x)$, όπου $r(x) = ax + b$ με $a, b \in \mathbb{Z}$ και άρα $f(i\sqrt{7}) = ai\sqrt{7} + b$.
   Αφού ο υποδακτύλιος $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] \subset \mathbb{C}$ περιέχει την μονάδα και είναι αντιμεταθετικός (όπως ο $\mathbb{C}$), δεν έχει διαιρέτες του μηδενός (όπως ο $\mathbb{C}$), συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ είναι ακεραία περιοχή.
   Αφού
   $$(i\sqrt{7})^{-1} = \frac{-i\sqrt{7}}{7} \notin \mathbb{Z}[i\sqrt{7}],$$
   συμπεραίνουμε ότι ο $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ δεν είναι σώμα.
   Θεωρούμε την πολλαπλασιαστική συνάρτηση $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{7}] \to \mathbb{Z}$, $b + ai\sqrt{7} \mapsto b^2 + 7a^2$. Το στοιχείο 2 (με νόρμα 4) είναι ανάγωγο και δεν διαιρεί τα $1 \pm i\sqrt{7}$. Από τη σχέση
   $$(1 + i\sqrt{7})(1 - i\sqrt{7}) = 2^3$$
   παρατηρούμε ότι το 2 δεν είναι πρώτο. Επομένως ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ δεν είναι Π.Μ.Α. (αλλιώς πρώτα και ανάγωγα ταυτίζονται) και άρα δεν είναι Π.Κ.Ι. ή Ε.Π.

   (γ') Να βρείτε το υπόσωμα του $\mathbb{C}$ που είναι το σώμα κλασμάτων του $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

   Απάντηση Όπως στο πρώτο ερώτημα, προκύπτει ότι $\mathbb{Q}[i\sqrt{7}] = \{c + di\sqrt{7} : c, d \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2+7\rangle$. Αφού ο $\mathbb{Q}[x]$ είναι Π.Κ.Ι. και το x^2+7 ανάγωγο, συμπεραίνουμε ότι το ιδεώδες $\langle x^2+7\rangle$ είναι μέγιστο στον $\mathbb{Q}[x]$ και ότι ο $\mathbb{Q}[i\sqrt{7}]$ είναι σώμα (προσοχή: ο $\mathbb{Z}[x]$ δεν είναι Π.Κ.Ι. και το $\langle x^2+7\rangle$ ΔΕΝ είναι μέγιστο στον $\mathbb{Z}[x]$, αν και πρώτο).
   Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{Q}[i\sqrt{7}]$ είναι το μικρότερο υπόσωμα του $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. Είναι φανερό ότι $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] \subset \mathbb{Q}[i\sqrt{7}]$. Αν $0 \neq b + ai\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, τότε ο αντίστροφός του (στον $\mathbb{C}$) είναι το στοιχείο
   $$\frac{1}{b + ai\sqrt{7}} = \frac{b - ai\sqrt{7}}{b^2 + a^2 7} = \frac{b}{b^2 + a^2 7} - \frac{ai\sqrt{7}}{b^2 + a^2 7} \in \mathbb{Q}[i\sqrt{7}].$$
   Έτσι ο $\mathbb{Q}[i\sqrt{7}]$ είναι το μικρότερο υπόσωμα του $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ και είναι σώμα κλασμάτων του $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

6. Να βρείτε τους ανάγωγους παράγοντες του $x^5 - 8$ στον $\mathbb{Q}[x]$, στον $\mathbb{R}[x]$ και στον $\mathbb{C}[x]$.

   Απάντηση Έστω $b = \sqrt[5]{8}$, $\omega = e^{2\pi i/5}$. Στον $\mathbb{C}[x]$ το $x^5 - 8$ αναλύεται στους παρακάτω ανάγωγους παράγοντες

$$x^5 - 8 = (x - b)(x - \omega b)(x - \omega^2 b)(x - \omega^3 b)(x - \omega^4 b).$$

   Στον $\mathbb{R}[x]$, υπολογίζοντας τα γινόμενα $(x - \omega b)(x - \omega^4 b)$ και $(x - \omega^2 b)(x - \omega^5 b)$ (σημειώνουμε ότι $\overline{\omega b} = \omega^4 b$ και $\overline{\omega^2 b} = \omega^3 b$) προκύπτει ότι

$$x^5 - 8 = (x - b)(x^2 - 2b\mathrm{Re}\omega\mathrm{x} + \mathrm{b}^2)(\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{bRe}\omega^2\mathrm{x} + \mathrm{b}^2).$$

   Τα πολυώνυμα $x^2 - 2b\mathrm{Re}(\omega)\mathrm{x} + \mathrm{b}^2$, $x^2 - 2b\mathrm{Re}(\omega^2)\mathrm{x} + \mathrm{b}^2 \in \mathbb{R}[\mathrm{x}]$ είναι ανάγωγα, αφού δεν έχουν ρίζα στον $\mathbb{R}$.

   Στον $\mathbb{Q}[x]$ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Eisenstein για $p = 2$, αφού το 2^2 διαιρεί το 8. Παρατηρούμε, όμως, ότι $(-2)^5 - 8 = -40$. Έτσι

$$(x - 2)^5 - 8 = x^5 - \binom{5}{1} 2x^4 + \binom{5}{2} 2^2 x^3 + \binom{5}{3} 2^3 x^2 + 2^4 \binom{5}{4} x - 40$$

   και σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein, για $p = 5$ (αφού το 5 διαιρεί κάθε συντελεστή του πολυωνύμου εκτός από τον αρχικό ενώ το 5^2 δεν διαιρεί το 40), προκύπτει ότι $(x - 2)^5 - 8$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$. Επομένως $x^5 - 8$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$.