Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγικές Εξετάσεις ΠΜΣ
Σεπτέμβριος 2016
9:30-13:00

Οδηγίες: Απαγορεύεται η χρήση και κατοχή κινητών τηλεφώνων και αριθμομηχανών κατά τη διάρκεια της εξέτασης. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1. (2 μ.) Να βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από την $(\mathbb{Z}_3, +)$ στην $(\mathbb{Z}_6, +)$.
2. (2 μ.) Έστω ότι $(G, *)$ είναι ομάδα και ότι $|G| = 9$. Να εξετάσετε ποια/ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.
   (α΄) Υπάρχει $x \in G$, $x \neq e_G$, τέτοιο ώστε $x^{-1} = x$.
   (β΄) Υπάρχει $x \in G$, $x \neq e_G$, τέτοιο ώστε $x^2 = x^5$.
3. (2 μ.) Έστω $S = \{a \in \mathbb{R}^+ : a \neq 1\}$, με πράξη $a \cdot b = a^{\ln b}$, για $a, b \in S$. Να εξετάσετε αν το S είναι ομάδα.
4. (2 μ.) Έστω $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$. Να εξετάσετε ποια/ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.
   (α΄) Ο R είναι ακεραία περιοχή.
   (β΄) Κάθε ιδεώδες του R είναι κύριο.
5. (2 μ.) Να βρείτε τους ανάγωγους παράγοντες του $f(x) = x^{11} - 1$ στον $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.
6. (2 μ.) Να αποδείξετε ότι $\langle x, y + 2 \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες στον $\mathbb{Q}[x, y]$.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Σεπτ. 2016

Για τα θέματα 1-4, να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΘΕΜΑ 1^o Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, τ.ω. $3x^5 + 96 = \int_c^x g(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$. Ποιά η σταθερά c;
(A) -96   (B) -2   (Γ) 4   (Δ) 15   (E) 32

ΘΕΜΑ 2^o Ποιά η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^\infty e^{-3x} \cos x$;
(A) 3   (B) 10   (Γ) $\frac{3}{10}$ (Δ) $\frac{10}{3}$ (E) 1

ΘΕΜΑ 3^o $f_1(x, y) = \ln(x + y), f_2 = \ln(x^2 + y^2), f_3 = \ln(x^3 + y^3), x, y > 0$. Ποιά συνάρτηση είναι αρμονική;
(A)f_1 (B) f_2 (Γ) f_3 (Δ) Όλες   (E) Καμία

ΘΕΜΑ 4^o Ποιός ο όγκος του ελλειψοειδούς $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$;
(A) π (B) 2π (Γ) $\frac{2\pi}{9}$ (Δ) $\frac{\pi}{9}$ (E) 1

ΘΕΜΑ 5^o Θεωρούμε την ακέραια συνάρτηση f. Αν $|f(z)| \leq 1 + |z|, \forall z \in \mathbb{C}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ τ.ω. $f(z) = az + b$.

ΘΕΜΑ 6^o Να δειχθεί ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι φραγμένος.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

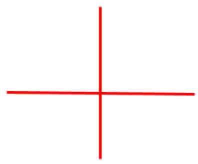
Έστω S μία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση $\bar{x}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \bar{x}(u, v)$, ορισμένη σε έναν ανοικτό τόπο D του επιπέδου (u, v).

1. Ορίστε την πρώτη θεμελιώδη μορφή $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ της S. Η πρώτη θεμελιώδης μορφή I χαρακτηρίζει πλήρως μία επιφάνεια; Δώστε ένα απλό παράδειγμα για να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.
2. Εξηγήστε πως χρησιμοποιείται η I για τον υπολογισμό του εμβαδού τμήματος της S.
3. Υπολογίστε το εμβαδόν του "δακτυλίου" της μοναδιαίας σφαίρας, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ που ορίζεται ως το σύνολο των σημείων της S^2 των οποίων το διάνυσμα θέσης τους σχηματίζει γωνία μικρότερη ή ίση με $\pi/4$ με το οριζόντιο επίπεδο $z = 0$.

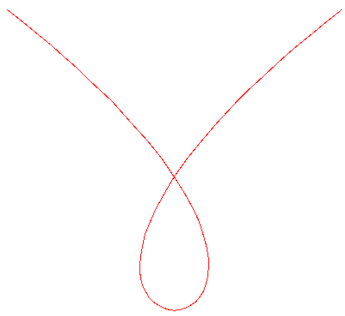
<u>ΘΕΜΑ 2</u>

1. Τι ονομάζουμε *διαφορίσιμη (λεία) πολλαπλότητα*;
2. Τα παρακάτω σχήματα αναπαριστούν υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$. Ποια από αυτά είναι λείες πολλαπλότητες; (Δώστε μία όχι αυστηρά μαθηματική αλλά περισσότερο διαισθητική δικαιολόγηση.)

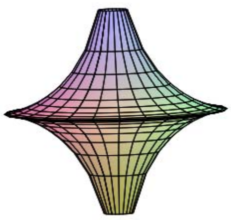
(α)



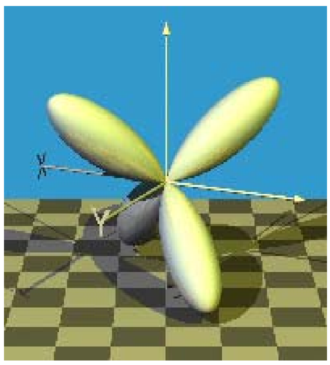
(β)



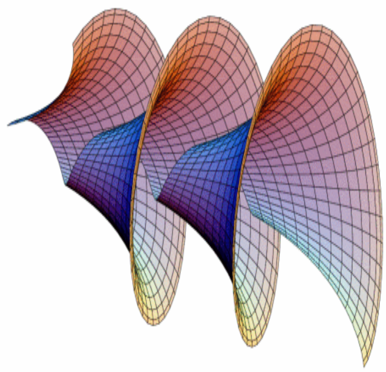
(γ)



(δ)



(ε)
$x^4 + y^4 + z^4 + 5xyz = 0$



(ζ)

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^3$ τη σφαίρα ακτίνας $R > 0$, $S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

1. Ποιες είναι οι γεωδαισιακές καμπύλες της S_R^2;
2. Έστω Γ καμπύλη επί της S_R^2 παραμετροποιημένη ως προς τη φυσική της παράμετρο s. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα $\kappa(s)$ της Γ έχει κάτω φράγμα το $1/R$, δηλαδή ότι $\kappa(s) \geq 1/R$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω S μία κλειστή και συνεκτική (δηλ. συμπαγής και χωρίς σύνορο) επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.

1. Πότε ένα σημείο της S λέμε ότι είναι υπερβολικό, παραβολικό, ελλειπτικό;
2. Μπορεί να ισχύει ότι κάθε σημείο της S είναι ελλειπτικό ή υπερβολικό; Δώστε παραδείγματα.
3. Μπορεί να ισχύει ότι τα σύνολα των ελλειπτικών και των υπερβολικών σημείων της S είναι και τα δύο μη κενά, αλλά δεν υπάρχουν παραβολικά σημεία; Δώστε κατάλληλα παραδείγματα, ανάλογα με την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 5

Περιγράψτε το σύνολο $\Gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = a\}$, για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$, και αποδείξτε ότι είναι λεία πολλαπλότητα εάν και μόνο εάν $a \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση κατασκευάστε έναν C^∞- διαφορίσιμο άτλαντα για το παραπάνω σύνολο.

ΘΕΜΑ 6

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ του $\mathbb{R}^3$, τον κυκλικό κύλινδρο $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ και την απεικόνιση $f: S^2 \longrightarrow C$ που στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

1. Κάνετε ένα σχήμα για να περιγράψετε γεωμετρικά την παραπάνω απεικόνιση.
2. Η f είναι τοπικός διφφεομορφισμός; Είναι ένας διφφεομορφισμός από τη σφαίρα S^2 στον κύλινδρο C;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!