Τελεστές σύνθεσης σε χώρους Hilbert σειρών Dirichlet

Αθανάσιος Κουρούπης
(σε συνεργασία με K–M. Perfekt)

Για $a < 1$ ο σταθμισμένος χώρος $\mathcal{D}_a$ σειρών Dirichlet ορίζεται ως

$$\mathcal{D}_a = \left\{ f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} : \|f\|_a^2 = |a_1|^2 + \sum_{n\geq 2} |a_n|^2 \log(n)^a < +\infty \right\}.$$

Στην περίπτωση όπου $a = 0$, ο χώρος $\mathcal{D}_0$ είναι ο κλασσικός χώρος Hardy $\mathcal{H}^2$ σειρών Dirichlet με τετραγωνικά αθροίσιμους συντελεστές. Ο $\mathcal{H}^2$ πρωτομελετήθηκε συστηματικά από τους H. Hedenmalm, P. Lindqvist και K. Seip. Αν $a \leq 0$, αναφερόμαστε στον $\mathcal{D}_a$ ως χώρο Bergman, ενώ αν $a > 0$ ως χώρο Dirichlet.

Δοθείσας ολόμορφης συνάρτησης $\varphi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$, όπου $\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \theta\}$, ο επαγώμενος τελεστής σύνθεσης $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο ημιεπίπεδο $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$, για κάθε $f \in \mathcal{D}_a$.

Στην περίπτωση του $\mathcal{H}^2$, προσφάτως οι O. F. Brevig και K–M. Perfekt χαρακτήρισαν τους συμπαγείς τελεστές σύνθεσης, με σύμβολα σειρές Dirichlet. Θα επικεντρωθούμε και εμείς σε αυτήν την περίπτωση για τους χώρους $\mathcal{D}_a$, όπου θα αποδείξουμε την ύπαρξη της αντίστοιχης συνάρτησης μέτρησης $M_{\varphi,1-a}$ του Nevanlinna και θα μελετήσουμε τις ιδιότητές της.

$$M_{\varphi,1-a}(w) = \lim_{\sigma\to 0^+} \lim_{T\to+\infty} \frac{\pi}{T} \sum_{\substack{s\in\varphi^{-1}(\{w\}) \\ |\operatorname{Im} s|<T \\ \sigma<\operatorname{Re} s<\infty}} (\operatorname{Re} s)^{1-a}, \qquad w \neq \varphi(+\infty).$$

Με την βοήθεια αυτής της συνάρτησης θα αποδείξουμε τον ακόλουθο τύπο (μη–σύμμορφης) αλλαγής μεταβλητής

$$\|C_\varphi(f)\|_a^2 = |f(\varphi(+\infty))|^2 + \frac{2^{1-a}}{\Gamma(2-a)\pi} \int_{\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}} |f'(w)|^2 M_{\varphi,1-a}(w) dA(w).$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τεχνικές σε συνδιασμό με ένα λήμμα τύπου Schwarz για σειρές Dirichlet, είμαστε σε θέση να χαρακτηρίσουμε τους προαναφερθέντες τελεστές σε χώρους Bergman και να δώσουμε αναγκαίες συνθήκες στην περίπτωση των χώρων Dirichlet.

Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Norway